

# **RADIACIONES ÓPTICAS INCOHERENTES**

Problemas resueltos



GOBIERNO  
DE ESPAÑA

MINISTERIO  
DE EMPLEO  
Y SEGURIDAD SOCIAL



INSTITUTO NACIONAL  
DE SEGURIDAD E HIGIENE  
EN EL TRABAJO

# ÍNDICE

SÍMBOLOS Y ABREVIATURAS .....	7
1. CONCEPTOS BÁSICOS .....	9
2. EVALUACIÓN DE LA EXPOSICIÓN LABORAL A RADIACIONES ÓPTICAS.....	39
3. CONTROL Y REDUCCIÓN DE LA EXPOSICIÓN A LAS RADIACIONES ÓPTICAS.....	71
4. CASOS PRÁCTICOS .....	81
BIBLIOGRAFÍA .....	113
ANEXOS:	
ANEXO A.....	115
ANEXO B (ejercicio 1.4).....	116
ANEXO C (ejercicio 1.8).....	117
ANEXO D (ejercicio 1.12) .....	118
ANEXO E (ángulos mínimos).....	120
APÉNDICES:	
GLOSARIO DE TÉRMINOS .....	123
FORMULARIO.....	127

# 1. CONCEPTOS BÁSICOS

**1.1** Toda radiación electromagnética puede caracterizarse físicamente a través de la longitud de onda, la frecuencia y la energía. ¿Cuál es el valor de estas magnitudes tanto para las bandas principales como para las subdivisiones más importantes de las radiaciones ópticas?

## SOLUCIÓN

Las radiaciones ópticas se dividen en: radiación ultravioleta (UVA, UVB, UVC), radiación visible y radiación infrarroja (IRA, IRB, IRC). La frecuencia « $\nu$ » de un movimiento ondulatorio se relaciona con la longitud de onda « $\lambda$ » a través de la siguiente expresión:

$$\nu = \frac{c_0}{\lambda}$$

siendo « $c_0$ » la constante universal que representa la velocidad de la luz en el vacío y que toma el valor de  $c_0 = 299.792.458 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$ .

La energía del fotón de una onda electromagnética viene dada por la ecuación de Planck–Einstein:

$$E = h\nu = h \frac{c_0}{\lambda}$$

siendo « $h$ » la constante de Planck que en el sistema internacional de unidades tiene el valor aproximado de  $h = 6,626\cdot 10^{-34} \text{ J}\cdot\text{s}$ .

Aplicando las fórmulas anteriores se pueden obtener los resultados pedidos en el enunciado del ejercicio (ver tabla 1).

Se puede observar que la longitud de onda y la frecuencia guardan una relación inversamente proporcional, de forma que a mayor longitud de onda menor es la frecuencia y viceversa. Por el contrario, la relación entre la frecuencia y la energía es directamente proporcional de forma que las radiaciones más energéticas son aquellas que tienen una mayor frecuencia.

## NOTA

A través de este ejercicio se pretende conseguir la familiarización con las unidades básicas que definen las radiaciones ópticas así como la relación entre longitud de onda y frecuencia. Se observa que en las radiaciones ópticas, la banda del ultravioleta es la más energética mientras que la del infrarrojo es la que menos energía asociada tiene. A pesar de ello, no existe una relación directa entre la energía de las radiaciones ópticas y el posible daño para la salud que estas puedan causar.

Tabla 1

			$\lambda$	$\nu$	E
RADIACIONES ÓPTICAS	Radiación infrarroja	IRC	1 mm	300 GHz	$200 \cdot 10^{-24}$ J
		IRB	3.000 mm	100 THz	$662 \cdot 10^{-22}$ J
		IRA	1.400 nm	214 THz	$142 \cdot 10^{-21}$ J
	Radiación visible		780 nm	384 THz	$255 \cdot 10^{-21}$ J
			380 nm	789 THz	$497 \cdot 10^{-21}$ J
			400 nm	749 THz	$523 \cdot 10^{-21}$ J
	Radiación ultravioleta	UVA			
			315 nm	952 THz	$631 \cdot 10^{-21}$ J
		UVB			
			280 nm	1,07 PHz	$709 \cdot 10^{-21}$ J
		UVC			
			100 nm	3 PHz	$20 \cdot 10^{-19}$ J

**1.2** Incluso teniendo en cuenta que la distancia entre la tierra y el sol toma valores comprendidos entre 0,98 ua y 1,02 ua (la órbita terrestre es ligeramente elíptica con unos semiejes que son prácticamente iguales), la distancia promedio entre ambos cuerpos celestes es de 1 ua. La unidad astronómica «ua» es la unidad de distancia que se corresponde a la distancia media entre la tierra y el sol. Dicho valor se determina experimentalmente y, de acuerdo con el sistema internacional de unidades, es igual a  $1,49597870691 \cdot 10^{11}$  m.

Suponiendo que la velocidad de la luz es igual a la velocidad de esta en el vacío  $c_0 = 2,99792458 \cdot 10^8$  m·s<sup>-1</sup>, ¿cuánto tiempo, en promedio, tarda la luz solar en llegar a la tierra?

SOLUCIÓN

La velocidad instantánea «v» es igual a la derivada del vector posición respecto del tiempo:

$$v = \frac{d\vec{r}}{dt}$$

Como la velocidad de la luz en el vacío « $c_0$ » es constante y en el supuesto del enunciado se puede considerar su trayectoria como rectilínea, es posible hacer la siguiente simplificación partiendo de la expresión anterior:

$$v = c_0 = \frac{\Delta x}{\Delta t}$$



Finalmente, sólo queda despejar la variable tiempo y sustituir el resto de variables con los valores dados en el enunciado:

$$\Delta t = \frac{\Delta x}{c_0} = \frac{1,49597870691 \cdot 10^{11} \text{ m}}{2,99792458 \cdot 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}} \approx 499 \text{ s} \approx 8,3 \text{ min} \approx 8 \text{ min } 19 \text{ s}$$

Es decir, cuando se observa el sol no es posible conocer su estado actual sino que, en realidad, sólo se conoce el estado de hace 8 minutos.

### NOTA

En el ámbito laboral la distancia entre la fuente y el trabajador es tan pequeña que se puede suponer que la luz viaja instantáneamente. Es decir: la exposición a una fuente tiene lugar tan pronto como esta empieza a emitir.

**1.3** Mediante una pequeña lámpara de haluro metálico se puede conseguir una aproximación aceptable a una fuente de radiación puntual isótropa, cuya intensidad radiante es independiente de la dirección.

Se dispone de un radiómetro provisto de un gran sensor circular de radio igual a 25 milímetros que carece de escala de intensidad radiante. Si se sitúa dicho radiómetro a una distancia de 2 metros de la fuente y se obtiene una lectura igual a 0,1 vatios, ¿cuál es el valor de la intensidad radiante?

### SOLUCIÓN

Formalmente se define la intensidad radiante « $I_e$ » como el flujo radiante « $\Phi_e$ » por unidad de ángulo sólido « $\omega$ »:

$$I_e = \frac{d\Phi_e}{d\omega}$$

Como el tamaño de la fuente es muy pequeño en relación con la distancia en la que se encuentra situado el radiómetro y suponiendo que la potencia emitida por la misma apenas varía a lo largo del tiempo, se puede hacer la siguiente aproximación:

$$I_e = \frac{d\Phi_e}{d\omega} \approx \frac{\Phi_e}{\omega}$$

El valor del flujo radiante « $\Phi_e$ » viene determinado por la lectura dada por el radiómetro. Por lo tanto, queda calcular el valor del ángulo sólido « $\omega$ ». El ángulo sólido es el ángulo que desde un punto subtiende un objeto en el espacio tridimensional. Se calcula proyectando el objeto sobre una esfera y dividiendo dicha área proyectada « $A_s$ » por el cuadrado de la distancia. En este caso, el objeto es el sensor radiométrico. Como las dimensiones de dicho sensor son muy pequeñas

en comparación con la distancia a la que está situado, es posible asimilar la superficie esférica a la superficie del mismo, de forma que:

$$\omega = \frac{\text{área esférica proyectada}}{(\text{distancia})^2} \cong \frac{\text{área plana del sensor}}{(\text{distancia})^2}$$

Sustituyendo en la expresión de la intensidad radiante se obtiene que:

$\Phi_e = 0,1 \text{ W}$   
 $\text{Área} = \pi(25 \cdot 10^{-3})^2 \text{ m}^2$   
 $\text{Distancia} = 2 \text{ m}$

$\left. \vphantom{\begin{matrix} \Phi_e \\ \text{Área} \\ \text{Distancia} \end{matrix}} \right\} I_e \cong \frac{\Phi_e}{\omega} = \frac{0,1 \text{ W}}{\frac{\pi(25 \cdot 10^{-3})^2 \text{ m}^2}{2^2 \text{ m}^2}} \cong \frac{0,1 \text{ W}}{4,9087 \cdot 10^{-4} \text{ sr}^{-1}} \cong 204 \text{ W} \cdot \text{sr}^{-1}$

La aproximación para el cálculo del ángulo sólido sólo es válida cuando la superficie del sensor es muy pequeña en relación con la distancia a la fuente luminosa, es decir, cuando la relación entre el área plana y la distancia al cuadrado toma valores pequeños. En este caso, ¿es  $4,9 \cdot 10^{-4} \text{ sr}$  un valor pequeño? Para ello se puede comparar los datos de la tabla 2.

Tabla 2

Orden de magnitud	Nombre	Símbolo	Corresponde aproximadamente a... (en relación con el globo terráqueo)
10 <sup>1</sup>	decaestereorradián	dasr	Algo más de la superficie de agua
10 <sup>0</sup>	estereorradián	sr	El área de Asia
10 <sup>-1</sup>	deciestereorradián	dsr	El área de Argentina y Perú
10 <sup>-2</sup>	centiestereorradián	csr	El área de Colombia
10 <sup>-3</sup>	miliestereorradián	msr	El área de Suiza
10 <sup>-6</sup>	microestereorradián	μsr	El área de Santa Mónica, California
10 <sup>-9</sup>	nanoestereorradián	nsr	La superficie de 8 campos de fútbol americano
10 <sup>-12</sup>	picoestereorradián	psr	El área de un piso pequeño
10 <sup>-15</sup>	femtoestereorradián	fsr	El área de una hoja A5
10 <sup>-18</sup>	attoestereorradián	asr	La superficie de un cuadrado de 6 mm de lado
10 <sup>-21</sup>	zeptoestereorradián	zsr	La sección de un alambre calibre 32
10 <sup>-24</sup>	yoctoestereorradián	ysr	La superficie de un glóbulo rojo

A la vista de estos datos, el valor más próximo a  $4,9 \cdot 10^{-4}$  sr es el correspondiente a la superficie de Suiza. Parece aceptable que puede considerarse esta superficie como plana en relación con la esfera terrestre y, por lo tanto, la suposición hecha para el cálculo del ángulo sólido del sensor radiométrico respecto de la fuente luminosa puede considerarse aceptable.

### NOTA

La intensidad luminosa hace referencia a la intensidad o “fuerza” de la luz en una determinada dirección. Tanto la intensidad radiante « $I_e$ » como el flujo radiante « $\Phi_e$ » son propiedades de la fuente de luz. Es decir: todas las fuentes tienen un determinado flujo luminoso y una intensidad luminosa.

**1.4** Obtener el valor de la intensidad radiante con los mismos datos del ejercicio 1.3 pero sin realizar ninguna simplificación en el cálculo del ángulo sólido. Con el nuevo resultado obtenido, ¿cuál es el error relativo cometido en el ejercicio 1.3?

### SOLUCIÓN

Para calcular el ángulo sólido sin la aproximación realizada en el ejercicio anterior, es necesario obtener una expresión para la superficie proyectada « $A_s$ » sobre una esfera en función del radio del sensor y la distancia a la fuente de iluminación. El área de un casquete esférico viene dado por:

$$A_s = \pi(a^2 + h^2)$$

siendo « $h$ » la altura del casquete y « $a$ » el diámetro (figura 1.1).

La superficie del sensor proyectada sobre una esfera imaginaria generará una superficie correspondiente a la de un casquete esférico. La figura 1.2 muestra una sección transversal del sensor de radio « $r$ » en relación con la fuente luminosa « $f$ »

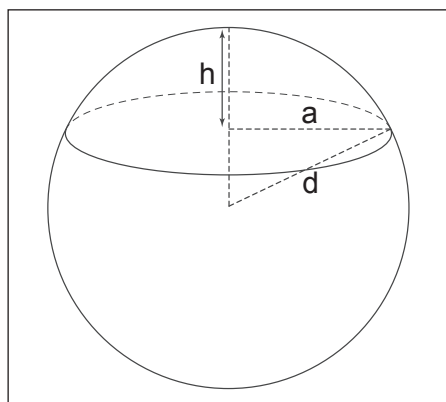


Figura 1.1. Altura « $h$ » y diámetro « $a$ » de un casquete esférico.

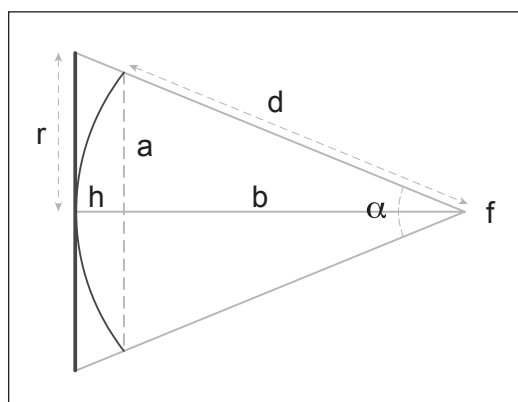


Figura 1.2. Sección transversal del sensor, la fuente y la esfera imaginaria asociada.

separados por una distancia «d» y la correspondiente proyección sobre la superficie de la esfera imaginaria.

Sea «α» el ángulo que subtiende la superficie del sensor en relación con la fuente «f». El área proyectada (el casquete esférico) debe subtender el mismo ángulo en relación con «f» por lo que se cumple que:

$$\tan \frac{\alpha}{2} = \frac{r}{d} = \frac{a}{b} \rightarrow a = b \frac{r}{d}$$

Así mismo, aplicando el teorema de Pitágoras es posible establecer la siguiente relación:

$$d^2 = a^2 + b^2$$

Partiendo de los dos resultados anteriores es posible expresar el valor de «b» en función de las variables conocidas «r» y «d»:

$$\left. \begin{array}{l} d^2 = a^2 + b^2 \\ a = b \frac{r}{d} \end{array} \right\} \rightarrow \left. \begin{array}{l} d^2 = a^2 + b^2 \\ a^2 = b^2 \left( \frac{r}{d} \right)^2 \end{array} \right\} \rightarrow d^2 = b^2 \left( \frac{r}{d} \right)^2 + b^2 = b^2 \left( 1 + \left( \frac{r}{d} \right)^2 \right)$$

$$b^2 = d^2 \frac{1}{1 + \left( \frac{r}{d} \right)^2}$$

Una vez conocido «b», el valor de «a» se obtiene sustituyendo «b» en la primera relación hallada:

$$a = b \frac{r}{d} \rightarrow a^2 = b^2 \left( \frac{r}{d} \right)^2 \rightarrow a^2 = d^2 \frac{\left( \frac{r}{d} \right)^2}{1 + \left( \frac{r}{d} \right)^2} = \frac{r^2}{1 + \left( \frac{r}{d} \right)^2}$$

Con estos datos, y teniendo en cuenta que «h» (la altura del casquete) es  $h = d - b$ , es posible calcular la superficie del mismo:

$$A_s = \pi(a^2 + h^2) = \pi(a^2 + (d - b)^2) = \pi \left( a^2 + \left( d - d \frac{1}{\sqrt{1 + \left( \frac{r}{d} \right)^2}} \right)^2 \right) =$$



$$\begin{aligned}
&= \pi \left( a^2 + d^2 \left( 1 - \frac{1}{\sqrt{1 + \left( \frac{r}{d} \right)^2}} \right)^2 \right) = \pi \left( a^2 + d^2 \left( \frac{\sqrt{1 + \left( \frac{r}{d} \right)^2}}{\sqrt{1 + \left( \frac{r}{d} \right)^2}} - \frac{1}{\sqrt{1 + \left( \frac{r}{d} \right)^2}} \right)^2 \right) = \\
&= \pi \left( a^2 + \frac{d^2}{1 + \left( \frac{r}{d} \right)^2} \left( \sqrt{1 + \left( \frac{r}{d} \right)^2} - 1 \right)^2 \right) = \pi \left( \frac{r^2}{\left( 1 + \left( \frac{r}{d} \right)^2 \right)} + \frac{d^2}{1 + \left( \frac{r}{d} \right)^2} \left( \sqrt{1 + \left( \frac{r}{d} \right)^2} - 1 \right)^2 \right) \\
A_s &= \frac{\pi}{1 + \left( \frac{r}{d} \right)^2} \left( r^2 + d^2 \left( \sqrt{1 + \left( \frac{r}{d} \right)^2} - 1 \right)^2 \right)
\end{aligned}$$

En la expresión anterior se observa que cuanto menor sea el tamaño del sensor en relación con la distancia a la fuente, entonces el cociente «r/d» tiende a 0 y el área proyectada tiende a  $A_s = \pi r^2$  que no es sino el área plana del propio sensor tal y como se ha mostrado en el ejercicio 1.3.

$$\begin{aligned}
\lim_{\frac{r}{d} \rightarrow 0} A_s &= \lim_{\frac{r}{d} \rightarrow 0} \left[ \frac{\pi}{1 + \left( \frac{r}{d} \right)^2} \left( r^2 + d^2 \left( \sqrt{1 + \left( \frac{r}{d} \right)^2} - 1 \right)^2 \right) \right] = \\
\frac{\pi}{1 + 0^2} \left( r^2 + d^2 \left( \sqrt{1 + 0^2} - 1 \right)^2 \right) &= \frac{\pi}{1} \left( r^2 + d^2 \left( \sqrt{1} - 1 \right)^2 \right) = \pi \left( r^2 + d^2 (1 - 1)^2 \right) = \pi \left( r^2 + d^2 (0)^2 \right) = \\
&= \pi(r^2) = \pi r^2 = \text{área plana del sensor}
\end{aligned}$$

Sustituyendo los valores del diámetro del sensor y la distancia a la fuente de iluminación, se obtiene el siguiente valor del área proyectada sobre la esfera:

$$\begin{aligned}
&\left. \begin{array}{l} r = 25 \cdot 10^{-3} \text{ m} \\ d = 2 \text{ m} \end{array} \right\} \rightarrow A_s = 0,00196327 \text{ m}^2 \\
\omega &= \frac{A_s}{d^2} \cong \frac{0,00196327}{2^2} \cong 4,9082 \cdot 10^{-4} \text{ sr}
\end{aligned}$$

De esta forma, la intensidad radiante toma el valor de:

$$I_e \cong \frac{\Phi_e}{\omega} = \frac{0,1 \text{ W}}{4,9082 \cdot 10^{-4}} \cong 203,7422 \text{ W} \cdot \text{sr}^{-1}$$

El valor de la intensidad radiante del ejercicio anterior con 4 decimales es de  $203,7183 \text{ W}\cdot\text{sr}^{-1}$ . El error relativo cometido por la aproximación en el cálculo del ángulo sólido puede estimarse de la siguiente forma:

$$\text{error} = 100 \frac{203,7422 - 203,7183}{203,7422} \cong 0,012\%$$

Si la distancia a la fuente hubiese sido de 0,25 metros, es decir, una relación « $r/d$ » de 0,1, entonces el error relativo sería de 0,74 %.

#### NOTA

El error cometido al aproximar la proyección esférica del área plana del sensor a un área plana depende de la relación « $r/d$ » y de la distancia « $d$ » del sensor a la fuente. Normalmente, si dicha relación es  $r/d \leq 0,1$  y si el radio del sensor es pequeño, entonces el error cometido por dicha aproximación puede considerarse despreciable por ser inferior al 1% tal y como se muestra en el gráfico del anexo B. Así mismo, cuando el ángulo plano « $\alpha$ » es pequeño (si  $r/d \leq 0,1$  los errores cometidos son muy pequeños) la relación entre el ángulo sólido « $\omega$ » y el plano « $\alpha$ » viene dada por:

$$\left. \begin{aligned} \omega &\cong \frac{A_s}{d^2} = \frac{\pi r^2}{d^2} \\ \alpha &\cong \frac{2r}{d} \end{aligned} \right\} \omega \cong \frac{\pi}{4} \alpha^2$$

Esta relación es la que propone la norma UNE-EN 62471:2008 para el cálculo de la radiancia « $L_e$ » a partir de la irradiancia « $E_e$ ». A pesar de esto, y con el fin de evitar errores de cálculo, es preferible hacer uso de la expresión  $\omega = A_s/d^2$  para estimar el ángulo sólido. Sólo cuando el foco de radiación es circular se recomienda la aproximación propuesta por la norma, como es el caso de los ángulos sólidos del anexo E.

**1.5** Relacionar la intensidad radiante con la irradiancia partiendo de una fuente puntual que ilumina un punto en una superficie con un ángulo de inclinación de  $\theta = \pi/3$  radianes tal y como se muestra en la figura 1.3. La distancia desde la fuente luminosa hasta la superficie « $r$ » es de 2 metros. Con un radiómetro se ha medido la irradiancia en la superficie obteniéndose un valor de  $E_e = 20 \text{ mW}\cdot\text{m}^{-2}$ . Calcular el valor de la intensidad radiante que se obtendría medido en la superficie.

#### SOLUCIÓN

La zona iluminada es un punto situado en una superficie. El enunciado establece que la fuente de radiación es puntual y que sólo sufre una pequeña dispersión, por

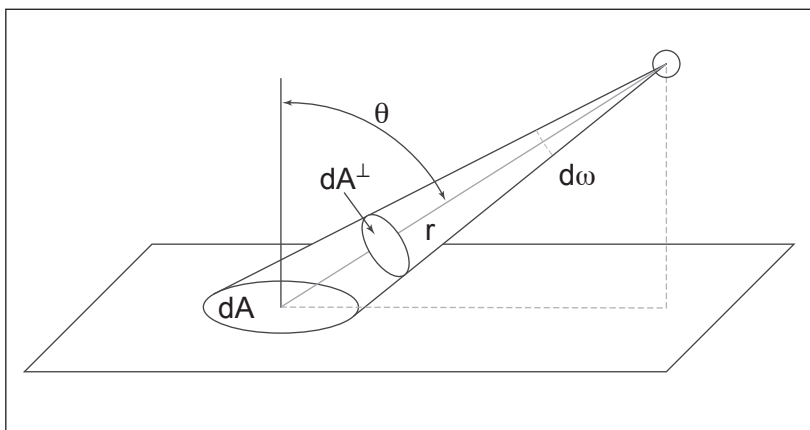


Figura 1.3. Esquema propuesto.

lo que se puede tratar la zona iluminada como un diferencial de superficie «dA». Como la fuente no está en el cenit de la zona iluminada «dA» sino que existe un ángulo «θ», el área aparente «dA<sup>⊥</sup>» vista desde la fuente es la proyección normal a la dirección de incidencia de la fuente y viene dada por:

$$\cos \theta = \frac{dA^{\perp}}{dA} \rightarrow dA^{\perp} = dA \cos \theta$$

Este ángulo «θ» es el ángulo entre la normal de la fuente y la línea de visión tal y como se define en la norma UNE-EN 14255-2:2005.

Como la fuente puntual sufre una pequeña dispersión espacial, entonces es razonable suponer que «d >> dA<sup>⊥</sup>» y por lo tanto es correcto aproximar «dA<sub>s</sub>» a «dA<sup>⊥</sup>» en el cálculo del ángulo sólido, tal y como se ha mostrado en el ejercicio 1.4.

$$d\omega = \frac{dA_s}{r^2} \cong \frac{dA^{\perp}}{r^2} = \frac{dA \cos \theta}{r^2}$$

Finalmente se calcula la intensidad radiante (definida en el ejercicio 1.3) y se sustituye el valor del ángulo sólido por la aproximación realizada:

$$I_e = \frac{d\Phi_e}{d\omega} = \frac{d\Phi_e r^2}{dA \cos \theta}$$

El término «dΦ<sub>e</sub>/dA» es el flujo a través de la superficie «dA» que corresponde a la irradiancia «E<sub>e</sub>» medida en dicha superficie. De esta manera la expresión anterior toma la forma más genérica de la ley inversa de los cuadrados:

$$I_e = E_e \frac{r^2}{\cos \theta}$$

Para hallar el valor de la intensidad radiante sólo hace falta sustituir los valores dados en el enunciado:

$$I_e = E_e \frac{r^2}{\cos \theta} = 20 \frac{2}{\cos \frac{\pi}{3}} = 80 \text{ mW} \cdot \text{sr}^{-1}$$

Se observa que cuando  $\theta = 0$  la superficie «dA» es normal a la dirección de incidencia del flujo (es decir  $dA = dA^\perp$ ) y la relación entre la intensidad radiante « $I_e$ » e irradiancia « $E_e$ » adopta la forma más conocida de la ley inversa de los cuadrados:

$$I_e = E_e r^2 \rightarrow E_e = \frac{I_e}{r^2}$$

#### NOTA

Mientras que la intensidad radiante « $I_e$ » y el flujo radiante « $\Phi_e$ » son propiedades de la fuente y, por lo tanto, no pueden modificarse a no ser que se modifique la propia fuente, la irradiancia « $E_e$ » es un valor que depende de la distancia a la misma.

Es decir, el valor de irradiancia depende de la distancia del trabajador con la fuente y será tanto menor cuanto mayor sea la distancia entre ambos. En el ejercicio 3.5 se muestra la utilidad de la ley inversa de los cuadrados para la protección del trabajador.

**1.6** De una fuente luminosa puntual e isotrópica se emite radiación únicamente en el espectro visible. Con un radiómetro se mide la irradiancia ponderada a 2 metros de distancia, obteniéndose un valor de « $E_e$ » igual a  $0,1 \text{ W} \cdot \text{m}^{-2}$ . Calcular el valor de la irradiancia si se hubiese medido a 4 metros de distancia. En ambos casos la irradiancia se supone medida en la dirección normal al flujo.

#### SOLUCIÓN

De acuerdo con ley de la inversa de los cuadrados es posible escribir:

$$I_e = E_e \frac{r^2}{\cos \theta} \rightarrow E_e = \frac{I_e \cos \theta}{r^2}$$

Aplicando la expresión anterior a los dos puntos de medición se obtiene:

$$I_e = E_{e, \text{inicial}} \frac{r_{\text{inicial}}^2}{\cos \theta_{\text{inicial}}}$$

$$I_e = E_{e, \text{final}} \frac{r_{\text{final}}^2}{\cos \theta_{\text{final}}}$$



Se observa que la intensidad radiante es una propiedad de la fuente radiante cuyo valor no depende del punto de medición. En cambio, la irradiancia toma valores diferentes en función del punto de medición. Es decir: la primera es una variable intensiva mientras que la segunda es una variable extensiva.

$$1 = \frac{E_{e, \text{inicial}}}{E_{e, \text{final}}} \frac{r_{\text{inicial}}^2}{r_{\text{final}}^2} \frac{\cos \theta_{\text{final}}}{\cos \theta_{\text{inicial}}}$$

$$E_{e, \text{final}} = E_{e, \text{inicial}} \frac{r_{\text{inicial}}^2}{r_{\text{final}}^2} \frac{\cos \theta_{\text{final}}}{\cos \theta_{\text{inicial}}} = E_{e, \text{inicial}} \left( \frac{r_{\text{inicial}}}{r_{\text{final}}} \right)^2 \frac{\cos \theta_{\text{final}}}{\cos \theta_{\text{inicial}}}$$

Para obtener el resultado final sólo basta con sustituir los valores dados en el enunciado teniendo en cuenta que la irradiancia se ha medido en la dirección normal al flujo y, por lo tanto,  $\theta_{\text{inicial}} = \theta_{\text{final}} = 0 \text{ rad}$ :

$$E_{e, \text{final}} = E_{e, \text{inicial}} \frac{r_{\text{inicial}}^2}{r_{\text{final}}^2} \frac{\cos \theta_{\text{final}}}{\cos \theta_{\text{inicial}}} = 0,1 \frac{2^2}{4^2} = 0,025 \text{ W} \cdot \text{m}^{-2}$$

$$\theta_{\text{inicial}} = \theta_{\text{final}} = 0 \text{ rad} \rightarrow \cos \theta_{\text{inicial}} = \cos \theta_{\text{final}} = 1$$

#### NOTA

Siempre que una fuente pueda considerarse isótropa y puntual, es posible hacer uso de la ley inversa de los cuadrados para estimar la irradiancia en cualquier punto de su entorno.

**1.7** En una planta industrial existe una fuente puntual isótropa cuya irradiancia en una determinada dirección es de  $E_e = 15 \mu\text{W} \cdot \text{m}^{-2}$ . Calcular el valor de la radiancia en la pupila del ojo cuando se observa la fuente en dicha dirección y a una distancia de 3 metros.

#### SOLUCIÓN

La radiancia « $L_e$ » en un punto se define como el flujo radiante a través o que emite una superficie por unidad de ángulo sólido. Es decir:

$$L_e = \frac{d^2 \Phi_e}{d\vec{A} d\vec{\omega}} = \frac{d^2 \Phi_e}{dA d\omega \cos \theta}$$

donde « $\theta$ » es el ángulo formado por los vectores « $d\vec{A}$ » y « $d\vec{\omega}$ ».

La radiancia puede expresarse en función de la irradiancia desarrollando la ex-

presión anterior y teniendo en cuenta la definición de irradiancia vista en el ejercicio 1.5:

$$L_e = \frac{d^2\Phi_e}{dA d\omega \cos\theta} = \frac{1}{\cos\theta} \frac{d}{d\omega} \left( \frac{d\Phi_e}{dA} \right) = \frac{1}{\cos\theta} \frac{d}{d\omega} (E_e) = \frac{1}{\cos\theta} \frac{dE_e}{d\omega}$$

$$dE_e = L_e \cos\theta d\omega$$

$$E_e = \int_{\omega} L_e \cos\theta d\omega$$

Si bien la expresión anterior muestra la relación formal entre radiancia e irradiancia, en la mayor parte de las situaciones es posible hacer aproximaciones que simplifiquen el cálculo. Cuando el ángulo sólido « $\omega$ » es muy pequeño y la radiancia no varía a lo largo de « $\omega$ » entonces es posible tratar ambas variables como constantes en la integral de forma que:

$$E_e = \int_{\omega} L_e \cos\theta d\omega \quad \xrightarrow{L_e, \cos\theta \text{ son ctes}} \quad E_e \cong L_e \cos\theta \omega$$

Para calcular el valor del ángulo sólido, puede considerarse que el diámetro de la pupila ocular varía entre los 2 y los 8 mm de diámetro. En un trabajador de 25 años, el diámetro promedio durante el día es de 4,5 mm aproximadamente. Con este dato y teniendo en cuenta la aproximación del ejercicio 1.3 para el ángulo sólido, es posible estimar el valor del ángulo sólido de la siguiente forma:

$$\omega \cong \frac{\pi \left( \frac{4,5}{2} \cdot 10^{-3} \right)^2}{3^2} = 1,76715 \cdot 10^{-6} \text{ sr}$$

Como el ojo es perpendicular a la dirección de proyección entonces  $\theta = 0$  y el valor de radiancia viene dado por:

$$L_e = \frac{E_e}{\omega} = \frac{15 \mu\text{W} \cdot \text{m}^{-2}}{1,76715 \cdot 10^{-6} \text{ sr}} \cong 8,5 \text{ W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{sr}^{-1}$$

#### NOTA

Cuando la fuente de radiación es puntual e isotrópica, la relación entre radiancia e irradiancia puede aproximarse a:

$$E_e \cong L_e \cos\theta \omega$$

Dadas estas condiciones, la radiancia « $L_e$ » es invariante respecto de la fuente.

**1.8** Imaginar una fuente luminosa cuya altura « $h_f$ » es de 10 centímetros y que está situada a una distancia « $d$ » de 4 metros. Calcular el ángulo subtendido « $\alpha$ » así como el tamaño « $h_r$ » de la imagen formada en la retina. Puede considerarse el ojo como una esfera perfecta cuyo diámetro es de 17 mm.

**SOLUCIÓN**

En la figura 1.4 se muestra el valor del ángulo subtendido « $\alpha$ » y el tamaño « $h_r$ » a calcular.

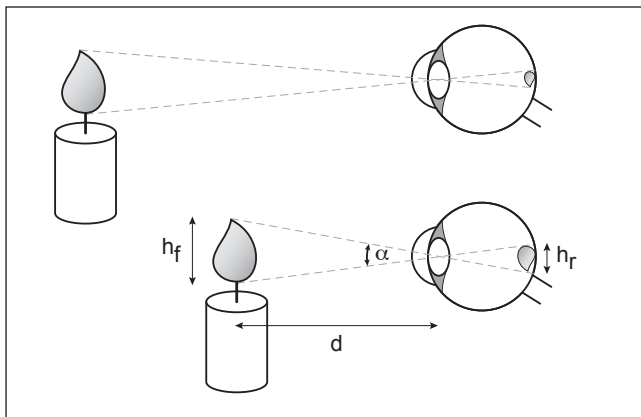


Figura 1.4. Ángulo subtendido « $\alpha$ » y tamaño de la imagen retiniana « $h_r$ ».

El cálculo formal del ángulo subtendido « $\alpha$ » se realiza mediante la siguiente expresión:

$$\tan \frac{\alpha}{2} = \frac{h_f}{d} \quad \xrightarrow{\text{para valores pequeños}} \quad \tan \alpha \approx \alpha \approx \frac{h_f}{d}$$

Sustituyendo los valores del enunciado en la expresión anterior se obtiene que:

$$\tan \frac{\alpha}{2} = \frac{h_f}{d} = 0,00125 \quad \rightarrow \quad \frac{\alpha}{2} = 0,001249999 \text{ rad} \quad \rightarrow \quad \alpha \approx 0,0025 \text{ rad} = 8,59'$$

El tamaño « $h_r$ » se calcula con la expresión  $h_r \approx d\alpha$  siendo « $\alpha$ » el valor del ángulo subtendido en radianes. Sustituyendo los valores se obtiene:

$$h_r \approx d\alpha = 170,0025 = 0,0425 \text{ mm}$$

Normalmente los valores de « $\alpha$ » son muy pequeños y es posible simplificar el cálculo mediante la siguiente aproximación:

$$\tan \frac{\alpha}{2} \approx \frac{\alpha}{2} = \frac{h_f}{d} \quad \rightarrow \quad \alpha \approx \frac{h_f}{d}$$

$$\alpha \approx \frac{h_f}{d} = \frac{0,01}{4} = 0,0025 \text{ rad}$$

Esta aproximación es válida siempre que la fuente de radiación sea pequeña en relación con la distancia de visualización (de forma análoga al ejercicio 1.4). El error relativo cometido por esta aproximación de la función tangente es inferior al 1% para valores de « $\alpha$ » inferiores a 0,173 radianes ( $\approx 9,9^\circ$ ) tal y como se muestra en el anexo C.

### NOTA

¿Cuán grande se ve un objeto que tiene un tamaño angular de 8,6'? Una referencia básica en cuanto al tamaño angular es el tamaño del sol y la luna. Durante un eclipse solar, la luna cubre totalmente el disco solar. Esto quiere decir que el ángulo subtendido por ambos astros, a pesar de que sus distancias respecto de la Tierra son completamente diferentes, es prácticamente el mismo. Aunque el ángulo varía en función de las órbitas, un tamaño angular medio aproximado para un observador situado en la superficie terrestre sería de 32' y de 31' para la luna y el sol, respectivamente.

Para los humanos, se considera como normal una visión 20/20. Dicha visión corresponde a una agudeza aproximada de 5'. Se estima que los halcones pueden llegar a tener una visión 20/2, que corresponde a una agudeza de 0,5'.

**1.9** En un espacio al aire libre se encuentran ubicadas dos fuentes isótropas, « $f_1$ » y « $f_2$ » (figura 1.5). Se dispone de un radiómetro con el que se mide la irradiancia espectral « $E_{e\lambda}$ » de cada una de ellas. El medidor se sitúa a una distancia de un metro de cada una de ellas y el sensor se coloca en posición perpendicular al flujo radiante. Los resultados obtenidos se muestran en la figura 1.6 y en la tabla 3.

¿En cuál de los puntos « $f_1$ », « $f_2$ » y « $f_3$ » el valor de la irradiancia toma un valor intermedio?

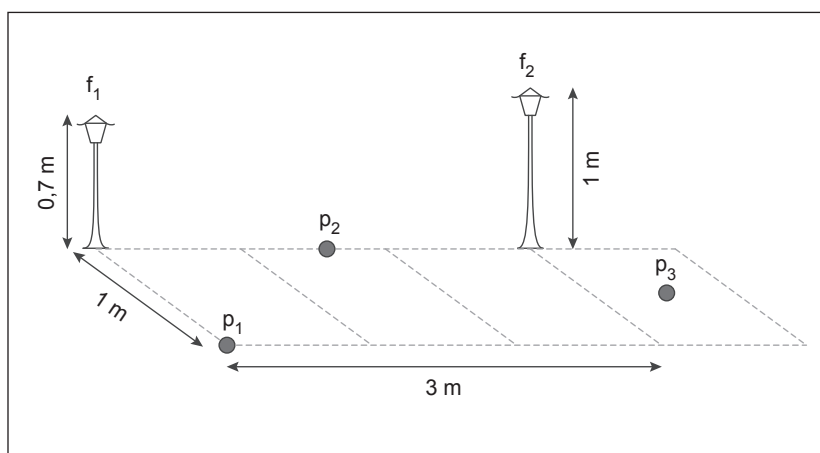


Figura 1.5. Esquema de las fuentes y los puntos « $p_1$ », « $p_2$ » y « $p_3$ »



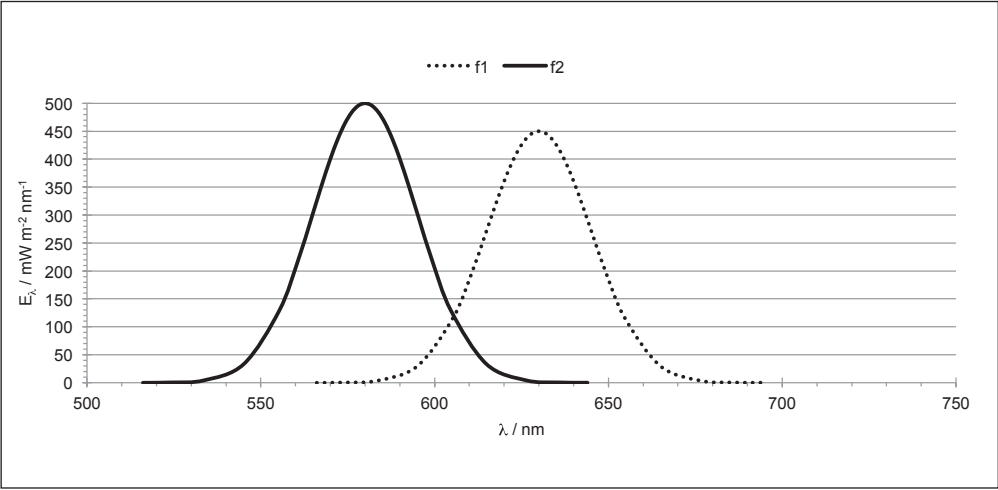


Figura 1.6. Irradiancia espectral de las fuentes «f<sub>1</sub>» y «f<sub>2</sub>» a 1 metro de distancia.

Tabla 3. Irradiancia espectral de las fuentes «f<sub>1</sub>» y «f<sub>2</sub>»

Fuente (f <sub>1</sub> )		Fuente (f <sub>2</sub> )	
λ nm	E <sub>eλ</sub> mW·m <sup>-2</sup> ·nm <sup>-1</sup>	λ nm	E <sub>eλ</sub> mW·m <sup>-2</sup> ·nm <sup>-1</sup>
560	8,399 10 <sup>-3</sup>	510	9,332 10 <sup>-3</sup>
570	1,510 10 <sup>-1</sup>	520	1,677 10 <sup>-1</sup>
580	1,740	530	1,933
590	12,85	540	14,28
600	60,90	550	67,67
610	185,0	560	205,6
620	360,3	570	400,4
630	450,0	580	500,0
640	360,3	590	400,4
650	185,0	600	205,6
660	60,90	610	67,67
670	12,85	620	14,28
680	1,740	630	1,933
690	1,510 10 <sup>-1</sup>	640	1,677 10 <sup>-1</sup>
700	8,399 10 <sup>-3</sup>	650	9,332 10 <sup>-3</sup>

## SOLUCIÓN

Cada uno de los tres puntos « $f_1$ », « $f_2$ » y « $f_3$ » recibe radiación procedente de las dos fuentes « $f_1$ » y « $f_2$ ». De forma genérica, la irradiancia en el punto « $i$ » sometido al flujo de « $f_n$ » fuentes se calcula aplicando el principio de superposición y la ley inversa de los cuadrados (ejercicio 1.5 y ejercicio 1.6) mediante la siguiente expresión:

$$(E_{e\lambda})_{p_i} = \sum_{f_n} E_{e\lambda, f_n} \left( \frac{r_{\text{medición}, f_n}}{r_{p_i} - f_n} \right)^2 \frac{\cos \theta_{\text{final}, f_n}}{\cos \theta_{\text{inicial}, f_n}}$$

siendo « $E_{e\lambda, f_n}$ » la irradiancia espectral procedente de la fuente « $f_n$ » medida originalmente a una distancia « $r_{\text{medición}, f_n}$ ».

Como las mediciones de la irradiancia de las dos fuentes se han realizado a la misma distancia de 1 metro y en la dirección normal al flujo, entonces « $r_{\text{medición}, f_1} = r_{\text{medición}, f_2} = 1$  metro» y « $\theta_{\text{inicial}, f_n} = 0$  rad». De esta forma y para este ejemplo, la expresión anterior queda reducida a:

$$(E_{e\lambda})_{p_i} = \sum_{f_n} E_{e\lambda, f_n} \frac{1}{(r_{p_i} - f_n)^2} \frac{\cos \theta_{\text{final}, f_n}}{1} = \sum_{f_n} E_{e\lambda, f_n} \frac{\cos \theta_{\text{final}, p_i - f_n}}{(r_{p_i} - f_n)^2}$$

Las distancias a las fuentes « $r_{p_i - f_n}$ » de cada punto se calculan aplicando el teorema de Pitágoras. Así, para el punto « $f_1$ » se tiene que las distancias y los ángulos en relación con las fuentes son:

$$r_{p_1 - f_1} = \sqrt{1^2 + 0,7^2}$$

$$r_{p_1 - f_2} = \sqrt{(3^2 + 1^2) + 1^2}$$

$$\cos \theta_{\text{final}, p_1 - f_1} = \frac{0,7}{r_{p_1 - f_1}} = \frac{0,7}{\sqrt{1^2 + 0,7^2}}$$

$$\cos \theta_{\text{final}, p_1 - f_2} = \frac{1}{r_{p_1 - f_2}} = \frac{1}{\sqrt{(3^2 + 1^2) + 1^2}}$$

El punto « $f_2$ » está situado entre las dos fuentes pero la distancia a las mismas no es igual porque cada fuente está situada a una altura diferente.

$$r_{p_2 - f_1} = \sqrt{1,5^2 + 0,7^2}$$

$$r_{p_2 - f_2} = \sqrt{1,5^2 + 1^2}$$

$$\cos \theta_{\text{final}, p_2 - f_1} = \frac{0,7}{r_{p_2 - f_1}} = \frac{0,7}{\sqrt{1,5^2 + 0,7^2}}$$

$$\cos \theta_{\text{final}, p_2 - f_2} = \frac{1}{r_{p_2 - f_2}} = \frac{1}{\sqrt{1,5^2 + 1^2}}$$

Finalmente, en el caso del punto «f<sub>3</sub>» se obtienen las siguientes distancias:

$$r_{p_3 - f_1} = \sqrt{(0,5^2 + 3,5^2) + 0,7^2}$$

$$r_{p_3 - f_2} = \sqrt{(0,5^2 + 0,5^2) + 1^2}$$

$$\cos \theta_{\text{final}, p_3 - f_1} = \frac{0,7}{r_{p_3 - f_1}} = \frac{0,7}{\sqrt{(0,5^2 + 3,5^2) + 0,7^2}}$$

$$\cos \theta_{\text{final}, p_3 - f_2} = \frac{1}{r_{p_3 - f_2}} = \frac{1}{\sqrt{(0,5^2 + 0,5^2) + 1^2}}$$

Por ejemplo, para calcular la irradiancia en el punto «f<sub>1</sub>» a 550 nm sólo hay que tener en cuenta el flujo procedente de la fuente «f<sub>2</sub>» porque la fuente «f<sub>1</sub>» no tiene emisión en dicha longitud de onda. El cálculo se realiza de la siguiente manera:

$$(E_{550})_{p_1} = 1^2 \cdot E_{550, f_2} \frac{\cos \theta_{\text{final}, p_1 - f_2}}{(r_{p_1 - f_2})^2} = 1^2 \cdot 67,67 \frac{\frac{1}{\sqrt{(3^2 + 1^2) + 1^2}}}{(3^2 + 1^2) + 1^2} = 1,855 \text{ mW} \cdot \text{m}^{-2}$$

En aquellas longitudes de onda en las que ambas fuentes tengan emisión, se aplica el principio de superposición: debe considerarse el efecto aditivo de cada una de las fuentes. Así, la irradiancia a 600 nm en el punto «f<sub>2</sub>» viene dada por:

$$\begin{aligned} (E_{600})_{p_2} &= 1^2 \left( E_{600, f_1} \frac{\cos \theta_{\text{final}, p_2 - f_1}}{(r_{p_2 - f_1})^2} + E_{600, f_2} \frac{\cos \theta_{\text{final}, p_2 - f_2}}{(r_{p_2 - f_2})^2} \right) = \\ &= 1^2 \left( 60,90 \frac{\frac{0,7}{\sqrt{1,5^2 + 0,7^2}}}{1,5^2 + 0,7^2} + 205,6 \frac{\frac{1}{\sqrt{1,5^2 + 1^2}}}{1,5^2 + 1^2} \right) = 44,49 \text{ mW} \cdot \text{m}^{-2} \end{aligned}$$

Realizando los cálculos anteriores para cada uno de los puntos propuestos y para cada longitud de onda, se obtienen los valores de irradiancia (ver tabla 4) que se muestran en la gráfica de la figura 1.7.

**Tabla 4**

$\lambda$ nm	$E_{e\lambda}$ $\text{mW}\cdot\text{m}^{-2}\cdot\text{nm}^{-1}$		
	$f_1$	$f_2$	$f_3$
510	0,00026	0,0016	0,0051
520	0,0046	0,0286	0,091
530	0,0530	0,3299	1,052
540	0,3914	2,437	7,773
550	1,855	11,55	36,835
560	5,639	35,09	111,915
570	11,03	68,36	217,952
580	14,37	85,61	272,192
590	15,92	70,32	218,142
600	29,07	44,49	112,825
610	73,06	40,10	39,601
620	139,1	58,05	13,160
630	173,2	69,78	7,780
640	138,7	55,64	5,478
650	71,20	28,55	2,771
660	23,44	9,399	0,911
670	4,946	1,983	0,192
680	0,6697	0,2685	0,026
690	0,0581	0,0233	0,0023
700	0,0032	0,0013	0,00013
$E_{eT}$ $\text{mW}\cdot\text{m}^{-2}$	<b>702,7</b>	<b>582,0</b>	<b>1.048,7</b>

Atendiendo al valor de irradiancia total (en  $\text{mW}\cdot\text{m}^{-2}$ ), el punto « $f_1$ » es el que tiene un valor intermedio:

$$582,0 < 702,7 < 1.048,7$$

$$f_1 < f_2 < f_3$$

#### NOTA

Cuando existe exposición a más de una fuente, se debe aplicar el principio de



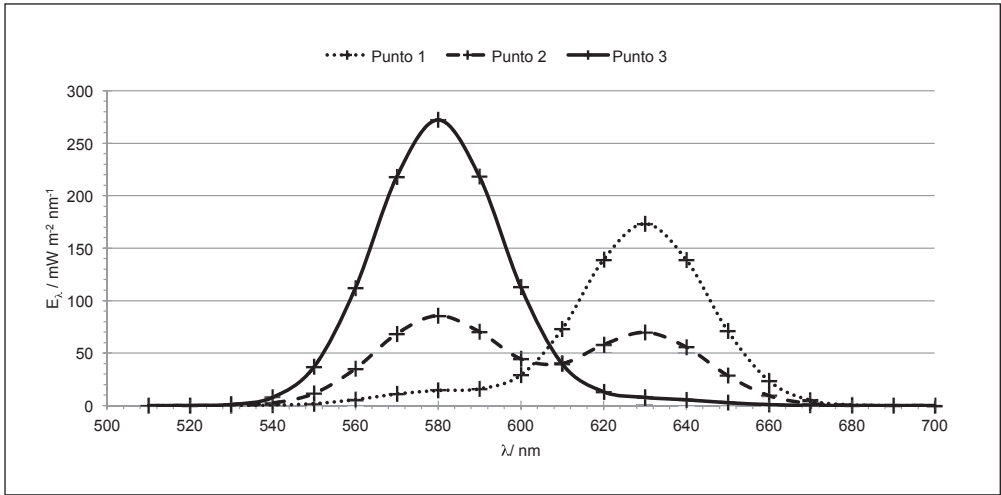


Figura 1.7. Irradiancia espectral para los puntos «f<sub>1</sub>», «f<sub>2</sub>» y «f<sub>3</sub>».

superposición de forma que se calcula el efecto aditivo de cada una de ellas. Así mismo se muestra cómo varía la influencia de cada una de las fuentes en función del punto donde se mida la irradiancia.

**1.10** Sea un foco para la iluminación a larga distancia en espectáculos (figura 1.8) cuya intensidad radiante es de 288 kW·sr<sup>-1</sup>. Suponiendo que dicho foco se sitúa a una distancia de 30 metros de un escenario, que el haz de luz incide perpendicularmente sobre el cuerpo y que la superficie corporal media es de 1,7 m<sup>2</sup>, ¿qué cantidad de energía radiante recibirá el maestro de ceremonias cuando el flujo emitido sigue el perfil de la figura 1.9?

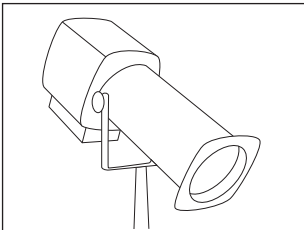


Figura 1.8. Foco de iluminación de larga distancia.

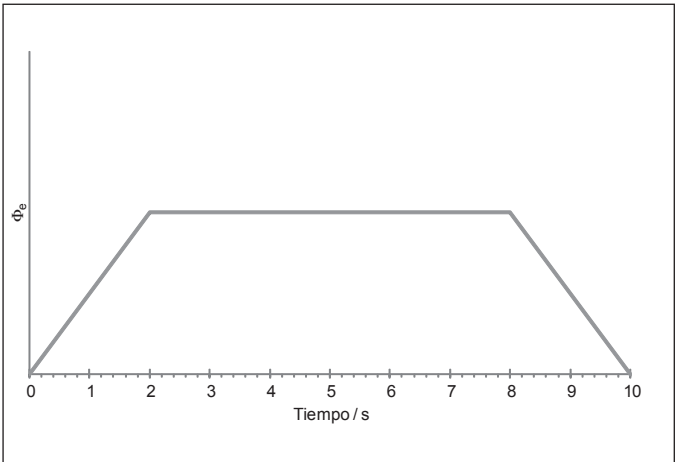


Figura 1.9. Perfil de flujo emitido por el foco.

**SOLUCIÓN**

La irradiancia y la intensidad radiante están relacionadas a través la ley inversa de los cuadrados (ejercicio 1.5), cuya expresión más genérica es:

$$I_e = E_e \frac{r^2}{\cos \theta}$$

La irradiancia es el flujo a través de una superficie de forma que la relación entre ambas unidades viene dada por:

$$E_e = \frac{d\Phi_e}{dA}$$

Finalmente, el flujo o potencia radiante « $\Phi_e$ » es la potencia total de la radiación electromagnética y se define como la energía de las ondas electromagnéticas por unidad de tiempo:

$$\Phi_e = \frac{dQ_e}{dt}$$

Como el tamaño de la fuente es muy pequeño en relación con la distancia de exposición, se puede considerar la fuente como puntual. Así mismo, como la superficie corporal es muy pequeña en relación con la distancia, es razonable suponer que en estas condiciones la irradiancia en el cuerpo es prácticamente constante e independiente de la superficie. Por eso:

$$E_e = \frac{d\Phi_e}{dA} \cong \frac{\Delta\Phi_e}{\Delta A} \rightarrow \Phi_e = E_e \cdot A$$

En la expresión anterior podemos introducir la relación entre la intensidad radiante y la irradiancia, de forma que:

$$\Phi_e = E_e \cdot A = \frac{\cos \theta}{r^2} I_e \cdot A$$

El valor del ángulo de incidencia es « $\theta = 0^\circ$ » de forma que la expresión anterior puede simplificarse a:

$$\Phi_e = E_e \cdot A = \frac{I_e}{r^2} A$$

El área corporal promedio de un adulto se puede suponer igual a 1,7 m<sup>2</sup> (1,9 m<sup>2</sup> en el caso de hombres y 1,6 m<sup>2</sup> en el caso de mujeres). No obstante, la superficie que está expuesta a la luz del foco es posible aproximarla a la mitad de este valor. Sustituyendo este valor junto con los valores de intensidad y distancia se obtiene el flujo emitido por el foco:

$$\Phi_e = \frac{I_e}{r^2} A = \frac{288 \cdot 10^3}{30^2} \frac{1,7}{2} = 272 \text{ W}$$

Si este flujo fuese constante a lo largo del tiempo, entonces la energía radiada se obtendría mediante « $Q_e = \Phi_e \cdot t$ ». No obstante, el perfil de la figura 1.9 muestra que entre  $t = 0$  y  $t = 2$  segundos el flujo crece linealmente hasta alcanzar el valor calculado anteriormente. Después, durante 6 segundos, dicho valor se mantiene constante y, finalmente, entre  $t = 8$  y  $t = 10$  decrece de forma lineal hasta hacerse nulo. De esta forma hay que resolver la siguiente ecuación para calcular la energía radiante:

$$\Phi_e = \frac{dQ_e}{dt} \rightarrow dQ_e = \Phi_e dt$$

La ecuación anterior debe integrarse considerando 3 zonas: la primera es la zona de crecimiento, la segunda corresponde al flujo constante y la última es la de la zona de decrecimiento:

$$Q_e = \int \Phi_e dt = \int_0^2 \Phi_{e, \text{crec}} dt + \int_2^8 \Phi_{e, \text{const}} dt + \int_8^{10} \Phi_{e, \text{decrec}} dt$$

$$Q_e = \int_0^2 \Phi_{e, \text{crec}} dt + \Phi_{e, \text{const}} (8 - 2) + \int_8^{10} \Phi_{e, \text{decrec}} dt$$

Geométricamente se verifica que:

$$\int_0^2 \Phi_{e, \text{crec}} dt + \int_8^{10} \Phi_{e, \text{decrec}} dt = \int_0^2 \Phi_{e, \text{const}} dt = \Phi_{e, \text{const}} (2 - 0)$$

Sustituyendo en la expresión anterior se obtiene:

$$Q_e = \int_0^2 \Phi_{e, \text{crec}} dt + \Phi_{e, \text{const}} (8 - 2) + \int_8^{10} \Phi_{e, \text{decr}} dt = \Phi_{e, \text{const}} (8 - 2) + \Phi_{e, \text{const}} (2 - 0)$$

$$Q_e = \Phi_{e, \text{const}} (8 - 2) + \Phi_{e, \text{const}} (2 - 0) = \Phi_{e, \text{const}} \cdot 8$$

El valor del flujo constante es el que previamente se había calculado. Sustituyendo en la expresión anterior se obtiene que la energía radiante que incide sobre el maestro de ceremonias es:

$$Q_e = \Phi_{e, \text{const}} \cdot 8 = 272 \cdot 8 = 2.176 \text{ J} \cong 520 \text{ cal}$$

#### NOTA

Las situaciones más habituales de exposición a radiaciones ópticas suponen que la emisión es constante a lo largo del tiempo y por lo tanto el cálculo de las magnitudes físicas correspondientes se simplifica sobremanera. No obstante, pueden darse situaciones en las que la emisión varía en el tiempo. En estos casos se debe dividir la exposición en tantas partes como variaciones haya y calcular cada una de ellas individualmente; el valor final viene dado por la suma de todas las partes.

**1.11** Todas las cabinas de flujo laminar de un laboratorio cuentan con dos fuentes de luz UV para el tratamiento de bacterias. El procedimiento de seguridad del laboratorio establece que el cristal de protección deberá estar bajado siempre que las fuentes sean accionadas. De hecho, las cabinas se han dotado de un sistema de protección mediante el cual el flujo radiante es interrumpido siempre que el cristal no esté bajado.

Para realizar la evaluación de riesgos específica, se considera como situación más desfavorable aquella en la que las dos fuentes están funcionando de forma simultánea. Aunque sería deseable medir directamente la irradiancia efectiva como paso inicial de la evaluación, desafortunadamente no se dispone de un radiómetro que aplique la ponderación que corresponde a la banda considerada. Dicho aparato sólo proporciona una tabla con valores de irradiancia espectral en crudo (ver tabla 5), cuya representación gráfica es la de la figura 1.10.

**Tabla 5. Irradiancia espectral en crudo**

$\lambda$ nm	E $\text{mW}\cdot\text{m}^{-2}\cdot\text{nm}^{-1}$	$\lambda$ nm	E $\text{mW}\cdot\text{m}^{-2}\cdot\text{nm}^{-1}$	$\lambda$ nm	E $\text{mW}\cdot\text{m}^{-2}\cdot\text{nm}^{-1}$
180	0,088	260	1,066	340	0,417
190	0,271	270	1,001	350	0,203
200	0,650	280	1,177	360	0,084
210	1,215	290	1,407	370	0,030
220	1,774	300	1,504	380	0,009
230	2,030	310	1,385	390	0,002
240	1,849	320	1,089	400	0,001
250	1,416	330	0,730		

¿Cuál es el valor de la irradiancia efectiva? ¿Qué efecto tiene la ponderación sobre los valores medidos en crudo?

## SOLUCIÓN

La irradiancia en el rango 180-400 nm se calcula mediante la fórmula primera de la tabla A.2 del anexo I del Real Decreto 486/2010, sobre la protección de la salud y la seguridad de los trabajadores contra los riesgos relacionados con la exposición a radiaciones ópticas artificiales:

$$E_{\text{eff}} = \sum_{\lambda=180\text{ nm}}^{\lambda=400\text{ nm}} E_{\lambda} S(\lambda) \Delta\lambda$$

Para ello, es necesario multiplicar cada valor de irradiancia espectral por el valor correspondiente de la curva de ponderación « $S(\lambda)$ ». La tabla A.3 del mencionado real decreto contiene los valores de « $S(\lambda)$ » para cada longitud de onda. Asimismo,

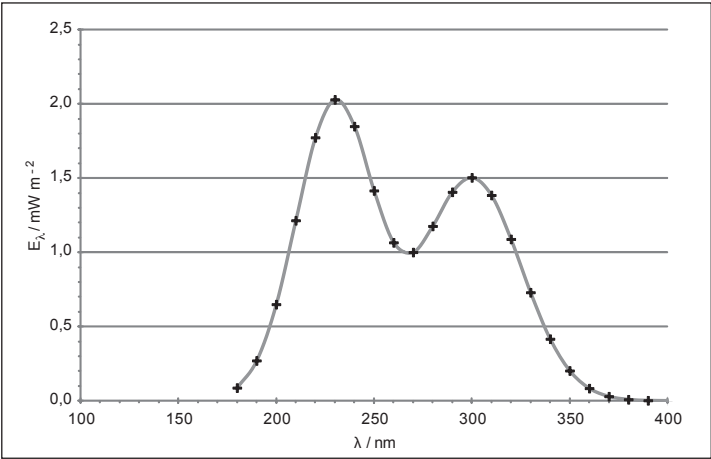


Figura 1.10. Irradiancia espectral “en crudo”.

también hay que multiplicar por el paso o ancho de banda ( $\Delta\lambda$ ) correspondiente. Si bien los valores de « $S(\lambda)$ » están tabulados para un ancho de banda de 1 nm, los datos de irradiancia de la fuente ultravioleta se han registrado con un paso de 10 nm y por eso el valor que debe utilizarse en la expresión anterior es  $\Delta\lambda = 10$  nm. La excepción la constituyen las longitudes de onda de los extremos del intervalo considerado; esto es:  $\lambda = 180$  nm y  $\lambda = 400$  nm, en los que se debe tomar un valor que sea la mitad, es decir,  $\Delta\lambda = 5$  nm (si se tomase  $\Delta\lambda = 10$  nm en los extremos se estaría sobrestimando el valor de la irradiancia efectiva « $E_{\text{eff}}$ »). (Ver tabla 6).

Tabla 6. Irradiancia en el rango 180-400 nm

$\lambda$ nm	$E_{\lambda}$ $\text{mW}\cdot\text{m}^{-2}\cdot\text{nm}^{-1}$	$S(\lambda)$	$E_{\lambda} S(\lambda) \Delta\lambda$	$\lambda$ nm	$E_{\lambda}$ $\text{mW}\cdot\text{m}^{-2}\cdot\text{nm}^{-1}$	$S(\lambda)$	$E_{\lambda} S(\lambda) \Delta\lambda$
180	0,088	0,0120	$5,28 \cdot 10^{-3}$	300	1,504	0,3000	4,51
190	0,271	0,0190	$51,49 \cdot 10^{-3}$	310	1,385	0,0150	$20,78 \cdot 10^{-2}$
200	0,650	0,0300	$19,50 \cdot 10^{-2}$	320	1,089	0,0010	$10,89 \cdot 10^{-3}$
210	1,215	0,0750	$91,13 \cdot 10^{-2}$	330	0,730	0,000410	$29,93 \cdot 10^{-4}$
220	1,774	0,1200	2,13	340	0,417	0,000280	$11,68 \cdot 10^{-4}$
230	2,030	0,1900	3,86	350	0,203	0,000200	$4,06 \cdot 10^{-4}$
240	1,849	0,3000	5,55	360	0,084	0,000130	$10,92 \cdot 10^{-5}$
250	1,416	0,4300	6,09	370	0,030	0,000093	$2,79 \cdot 10^{-5}$
260	1,066	0,6500	6,93	380	0,009	0,000064	$5,76 \cdot 10^{-6}$
270	1,001	1,0000	10,01	390	0,002	0,000044	$8,80 \cdot 10^{-7}$
280	1,177	0,8800	10,36	400	0,001	0,000030	$1,50 \cdot 10^{-7}$
290	1,407	0,6400	9,00				

$$E_{\text{eff}} = \sum_{\lambda=180 \text{ nm}}^{\lambda=400 \text{ nm}} E_{\lambda} S(\lambda) \cdot \Delta\lambda \cong 59,8 \text{ mW} \cdot \text{m}^{-2}$$

Con el fin de comprender el efecto de la ponderación sobre los valores medidos en crudo, en la figura 1.11 se representan tres curvas:

- La irradiancia en crudo de la fuente de radiación
- La curva de ponderación « $S(\lambda)$ »
- La irradiancia ponderada por « $S(\lambda)$ »

Se observa que la curva de ponderación « $S(\lambda)$ » afecta principalmente al rango de longitudes de onda que va de 200 a 310 nm. Es decir, la aportación de las longitudes de onda fuera de este rango es prácticamente despreciable para el cálculo de la irradiancia efectiva. Por este motivo, si bien el primer máximo ( $\lambda = 230 \text{ nm}$ ) tiene un valor de irradiancia en crudo mayor que el segundo ( $\lambda = 300 \text{ nm}$ ), su contribución al cálculo de la irradiancia efectiva es mucho menor debido al efecto de la curva « $S(\lambda)$ » de ponderación. Así, en la figura 1.11 se muestra que la curva final ponderada difiere mucho de la curva sin ponderar y tiende a adoptar el perfil de la curva de ponderación.

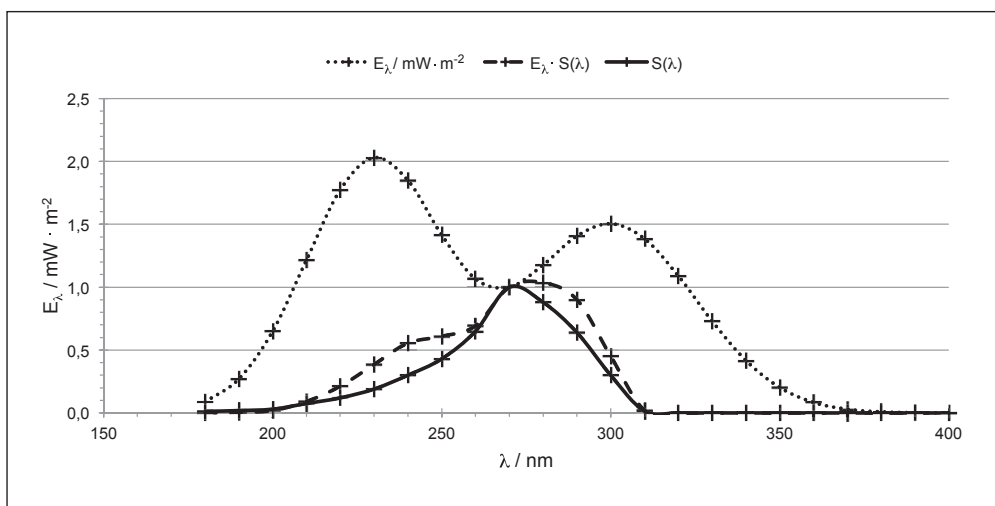


Figura 1.11. Irradiancia en crudo, curva de ponderación « $S(\lambda)$ » e irradiancia ponderada.

#### NOTA

Este ejercicio hace hincapié en la importancia del efecto de la ponderación que modifica de forma notable los valores originales. Así mismo y a fin de evitar una sobrestimación, el ejercicio resalta el hecho de que en los extremos del rango de longitudes de onda considerados, el paso que debe tomarse es la mitad del valor tomado para el resto de longitudes de onda.

**1.12** Identificar cuál es la exposición solar para cada una de las 7 bandas en las que se dividen las radiaciones ópticas de acuerdo con la tabla A.1 del anexo I del Real Decreto 486/2010, teniendo en cuenta que el sol puede aproximarse de forma satisfactoria a un cuerpo negro con una temperatura radiante de  $T = 5.780$  K y que, por lo tanto, la radiancia espectral se puede calcular mediante la ley de Planck de radiación del cuerpo negro.

### SOLUCIÓN

La ley de Planck establece la siguiente fórmula para la radiancia espectral de un cuerpo negro:

$$L_{\lambda} = \frac{2hc^2}{\lambda^5} \frac{1}{e^{\frac{hc}{\lambda kT}} - 1} \left[ \text{Wm}^{-2} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{sr}^{-1} \right]$$

La radiancia total en una banda de longitudes de onda se puede calcular a través de (para más detalles, se puede consultar la demostración en el anexo D):

$$L = \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} L_{\lambda} d\lambda \quad \text{tal que } \lambda_2 \geq \lambda_1$$

$$L = 2 \frac{k^4 T^4}{h^3 c^2} \left( \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{x_2^3}{n} + \frac{3x_2^2}{n^2} + \frac{6x_2}{n^3} + \frac{6}{n^4} \right) e^{-nx_2} - \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{x_1^3}{n} + \frac{3x_1^2}{n^2} + \frac{6x_1}{n^3} + \frac{6}{n^4} \right) e^{-nx_1} \right)$$

$$x_i = \frac{hc}{kT\lambda_i}$$

La irradiancia en la superficie terrestre se puede calcular teniendo en cuenta que el ángulo sólido del disco solar es muy pequeño  $w = 6,8 \cdot 10^{-5}$  sr y por lo tanto la siguiente aproximación es aplicable (ver ejercicio 1.7):

$$E_{\lambda} = L_{\lambda} \omega$$

Tomando el valor de la temperatura superficial del sol como  $T = 5.780$  K y sustituyendo dicho valor en la expresión anterior de la irradiancia se obtiene el espectro de la figura 1.12.

Al disponer de expresiones analíticas para la irradiancia y la radiancia debería ser inmediato el cálculo de la exposición en las bandas de la tabla A.1 del anexo I del Real Decreto 486/2010 (en el anexo A se muestra un esquema de dichas bandas). No obstante, dicho cálculo se ve aumentado por el hecho de que en los grupos 1, 3, 4 y 5 es necesario utilizar las ponderaciones «S(λ)», «B(λ)» y «R(λ)» del anexo I.C “Curvas de ponderación” (tablas A.3 y A.4) del real decreto. Estas ponderaciones están formadas por valores discretos de forma que para poder aplicarlas es necesario discretizar de igual forma valores discretos de la irradiancia o de la

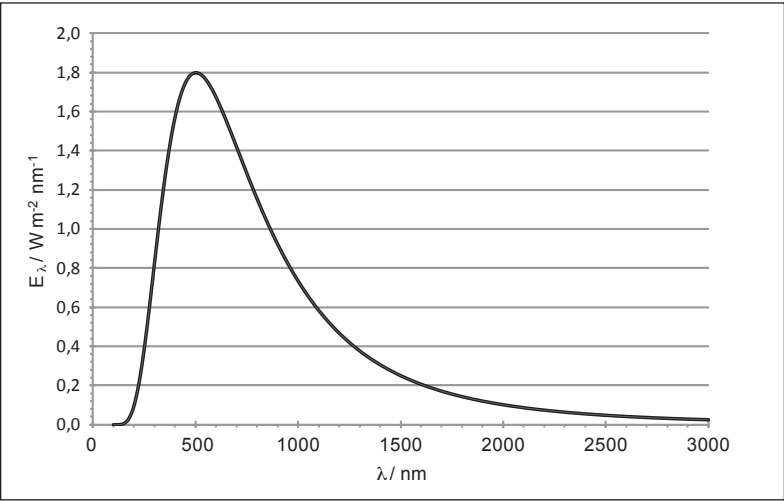


Figura 1.12. Irradiancia espectral de un cuerpo negro con T = 5.780 K.

radiancia según las fórmulas de la tabla A.2 del anexo I.B “Expresiones”, para poder calcular la exposición correspondiente.

La primera banda es la correspondiente al rango 180-400 nm que engloba el UVA, UVB y UVC. La exposición radiante se calcula de forma análoga al ejercicio 1.11, con la diferencia de que en este caso los valores de irradiancia para cada longitud de onda son los que se muestran en la figura 1.12:

$$E_{\text{eff}} = \sum_{\lambda=180\text{ nm}}^{\lambda=400\text{ nm}} E_{\lambda} S(\lambda) \Delta\lambda; \quad H_{\text{eff}} = E_{\text{eff}} \Delta t$$

Así, el cálculo (ver tabla 7) se realiza tal y como se muestra en los siguientes ejemplos (el paso de ancho de banda es  $\Delta\lambda = 1\text{ nm}$ , excepto para las longitudes de onda  $\lambda = 180\text{ nm}$  y  $\lambda = 400\text{ nm}$  en las que se debe tomar como paso la mitad del valor anterior  $\Delta\lambda = 0,5\text{ nm}$ ):

Tabla 7

$\lambda$ nm	$E_{\lambda}$ $\text{W}\cdot\text{m}^{-2}\cdot\text{nm}^{-1}$	$S(\lambda)$	$E_{\lambda} S(\lambda) \Delta\lambda$ $\text{W}\cdot\text{m}^{-2}$
180	0,042307202	0,012	0,000253843
...	...	...	...
270	0,559611736	1	0,559611736
...	...	...	...
308	0,903681108	0,026	0,023495709
...	...	...	...



Realizando el mismo procedimiento para todas las longitudes de onda del rango 180-400 nm y sumando los resultados, se obtiene el siguiente valor para la irradiancia efectiva:

$$E_{\text{eff}} \cong 24,93 \text{ W} \cdot \text{m}^{-2}$$

Para calcular la exposición al UVA (rango 315-400 nm) no es necesario realizar ninguna ponderación y por lo tanto es posible utilizar la expresión analítica de la irradiancia. Tomando como límite superior de los sumatorios  $n = 10$ :

$$E_{\text{UVA}} = \int_{315}^{400} E_{\lambda} d\lambda = \omega \int_{315}^{400} L_{\lambda} d\lambda$$

$$E_{\text{UVA}} = 2\omega \frac{k^4 T^4}{h^3 c^2} \left( \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{x_2^3}{n} + \frac{3x_2^2}{n^2} + \frac{6x_2}{n^3} + \frac{6}{n^4} \right) e^{-nx_2} - \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{x_1^3}{n} + \frac{3x_1^2}{n^2} + \frac{6x_1}{n^3} + \frac{6}{n^4} \right) e^{-nx_1} \right)$$

$$x_1 = \frac{hc}{kT \cdot 315 \cdot 10^{-9}} \quad x_2 = \frac{hc}{kT \cdot 400 \cdot 10^{-9}}$$

$$E_{\text{UVA}} \cong 110,410965769178 \text{ W} \cdot \text{m}^{-2}$$

De forma alternativa también se podría calcular la irradiancia al igual que en el caso anterior pero sin aplicar ninguna ponderación:

$$E_{\text{UVA}} = \sum_{\lambda=315 \text{ nm}}^{\lambda=400 \text{ nm}} E_{\lambda} \Delta\lambda; \quad H_{\text{UVA}} = E_{\text{UVA}} \Delta t$$

$$E_{\text{UVA}} = 110,410627476331 \text{ W} \cdot \text{m}^{-2}$$

Se observa que el error relativo «e», en tanto por ciento, cometido al realizar la discretización en el cálculo de la irradiancia es muy pequeño:

$$e = 100 \frac{110,41097 - 110,4106}{110,41097} \cong 0,0003\%$$

Para la exposición a la luz azul (300-700 nm) se utiliza la curva de ponderación «B(λ)». El procedimiento es el mismo que en el cálculo de la exposición al ultravioleta pero en este caso el paso de ancho de banda es  $\Delta\lambda = 5 \text{ nm}$ , excepto para las longitudes de onda  $\lambda = 300$  y  $\lambda = 700$  en las que se debe tomar como paso la mitad del valor anterior  $\Delta\lambda = 2,5 \text{ nm}$ .

En la tabla 8 se muestra, a modo de ejemplo, el cálculo para algunas longitudes de onda:

**Tabla 8**

$\lambda$ nm	$L_\lambda$ $\text{W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{nm}^{-1} \cdot \text{sr}^{-1}$	$B(\lambda)$	$L_\lambda B(\lambda) \Delta\lambda$ $\text{W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{sr}^{-1}$
300	12.218,92172	0,01	305,473043
305	12.889,25411	0,01	644,4627055
...	...	...	...
435	25.107,48908	1	125.537,4454
440	25.311,72670	1	126.558,6335
...	....	....	....
700	20.830,78229	0,00001	0,520769557

$$L_B = \sum_{\lambda=300 \text{ nm}}^{\lambda=700 \text{ nm}} L_\lambda B(\lambda) \Delta\lambda \cong 1.802.925,24 \text{ W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{sr}^{-1}$$

En el rango 380-1.400 nm la curva de ponderación a utilizar es  $R(\lambda)$ . Al igual que antes, el paso de ancho de banda que debe tomarse es  $\Delta\lambda = 5 \text{ nm}$  y  $\Delta\lambda = 2,5 \text{ nm}$  para las longitudes de onda  $\lambda = 300$  y  $\lambda = 1.400$ . La tabla 9 muestra algunos ejemplos de cálculo.

**Tabla 9**

$\lambda$ nm	$L_\lambda$ $\text{W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{nm}^{-1} \cdot \text{sr}^{-1}$	$R(\lambda)$	$L_\lambda R(\lambda) \Delta\lambda$ $\text{W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{sr}^{-1}$
380	21.520,07254	0,1	5.380,018135
...	...	...	...
430	24.883,93139	9,8	1.219.312,638
435	25.107,48908	10	1.255.374,454
440	25.311,72670	10	1.265.586,335
445	25.497,06402	9,7	1.236.607,605
...	...	...	...
500	26.426,50918	1	132.132,5459
...	...	...	...
705	20.631,41088	0,977237221	100.808,9132
...	...	...	...
1.400	4.503,187432	0,02	225,1593716

$$L_R = \sum_{\lambda=380 \text{ nm}}^{\lambda=1.400 \text{ nm}} L_{\lambda} R(\lambda) \Delta\lambda \cong 24.449.196,12 \text{ W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{sr}^{-1}$$

Se realiza exactamente el mismo cálculo para el rango 780-1.400 nm, excepción hecha del límite inferior del sumatorio:

$$L_R = \sum_{\lambda=780 \text{ nm}}^{\lambda=1.400 \text{ nm}} L_{\lambda} R(\lambda) \Delta\lambda \cong 1.762.408,33 \text{ W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{sr}^{-1}$$

En el intervalo 380-3.000 no se realiza ninguna ponderación y por lo tanto es posible calcular la irradiancia utilizando las fórmulas analíticas obtenidas inicialmente (al igual que en el cálculo de la exposición al UVA, se toma como límite superior de los sumatorios  $n = 10$ ):

$$E_{\text{IR}} = \int_{380}^{3.000} E_{\lambda} d\lambda = \omega \int_{380}^{3.000} L_{\lambda} d\lambda$$

$$E_{\text{IR}} = 2\omega \frac{k^4 T^4}{h^3 c^2} \left( \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{x_2^3}{n} + \frac{3x_2^2}{n^2} + \frac{6x_2}{n^3} + \frac{6}{n^4} \right) e^{-nx_2} - \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{x_1^3}{n} + \frac{3x_1^2}{n^2} + \frac{6x_1}{n^3} + \frac{6}{n^4} \right) e^{-nx_1} \right)$$

$$x_1 = \frac{hc}{kT 380} \cdot 10^9 \quad x_2 = \frac{hc}{kT 3.000} \cdot 10^9$$

$$E_{\text{piel}} = 1.203,70 \text{ W} \cdot \text{m}^{-2}$$

$$H_{\text{piel}} = E_{\text{piel}} \Delta t$$

En el rango 780-3.000 nm tampoco se realiza ninguna ponderación. Se realiza el mismo cálculo que en el caso anterior pero cambiando el límite inferior de 380 nm por el de 780 nm. De esta forma, el valor que se obtiene de irradiancia es:

$$E_{\text{IR}} = 566,11 \text{ W} \cdot \text{m}^{-2}$$

#### NOTA

De las siete bandas contempladas en la tabla A.1 “Valores Límite para las Radiaciones ópticas incoherentes y sus efectos sobre la salud” del anexo I del Real Decreto 486/2010, tan sólo las correspondientes a los grupos 2, 6 y 7 no necesitan ser ponderadas. En estos casos y siempre que la radiación de la fuente pueda ser caracterizada mediante una función matemática, es posible calcular los valores de irradiancia de forma analítica mediante la integración de dicha función.

En cualquier otra situación el cálculo de las magnitudes físicas correspondientes debe realizarse mediante los valores discretos que se hayan registrado a través de las mediciones pertinentes.